© EUROPEAN REVIEW OF ARTISTIC STUDIES 2019, vol. 10, n. 4, pp. 1-19 ISSN 1647-3558

https://doi.org/10.37334/eras.v10i4.214

A GEOMETRICA COM ORIGAMI, RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO E DA TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO: Perspetivas Futuras Para o Programa de Geometria Euclidiana no Ensino Superior em Angola

Geometric with origami, solving the problem of duplicating the cube and trisecting an angle, future perspectives for the euclidean geometry program in higher education in Angola

CONTREIRAS, Gilson[1]

Resumo

O presente estudo trata sobre a Geometria do Origami, resolução do problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. No sentido de encontrar resposta para tal questão, propomos em alcançar o seguinte objetivo geral: conhecer os axiomas de Huzita-Hatore para resolver os problemas da duplicação do cubo e da trisseção de um ângulo, quanto aos objetivos específicos: 1) a formação teórica e metodológica dos axiomas de Huzita-Hatore para resolver os problemas da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo; 2) interpretar os axiomas de Huzita- Hatore para resolver os problemas da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo e 3) resolver de forma metodologica os proplemas da duplição do cubo e da tricesseção de um ângulo para chegar até à resolução da equação cúbica, onde optou-se por uma pesquisa bibleografica. Na pesquisa buscou-se, principalmente, suporte teórico os postulados escritos por Euclides de Alexandria.

Abstract

The present study is about Origami Geometry, solving the problem of doubling the cube and the angle trisection. In order to find an answer to this question, we propose to achieve the following general objective: to know the Huzita-Hatore axioms to solve the problems of doubling the cube and the trisection of an angle, regarding the specific objectives: 1) theoretical and methodological analysis of the Huzita-Hatore axioms to solve the problems of doubling the cube and the trisection of an angle; 2) interpret the Huzita-Hatore axioms to solve the problems of doubling the cube and the trisection of an angle and 3) solving methodically the proplemas of doubling the cube and tricessection of an angle to arrive at the solution of the cubic equation , where a Bible study was chosen. The research sought mainly theoretical support for the postulates written by Euclides of Alexandria.

Palavras-chave: *Geometria; Origami; Axiomas de Huzita – Hatori.*

Key-words: *Geometry; Origami; Axioms of Huzita – Hatori.*

Data de submissão: novembro de 2019 | **Data de publicação**: dezembro de 2019.

[1] GILSON CONTREIRAS – Escola Superior Politécnica de Malanje, ANGOLA. E-mail: gilson.diogo@ubi.pt.

INTRODUÇÃO

A Geometria está presente na vida cotidiana de todo cidadão. A todo o momento estamos utilizando conhecimentos geométricos em nossos afazeres. O estudo da Geometria é indispensável para o pleno desenvolvimento do ser humano, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento, devido a grande importância que ela assume no cotidiano do individuo. Esta importância amplia a fronteira de conhecimento dos estudantes, facilitando na compreensão dos conceitos e das propriedades geométricas e são uma fonte muito rica de problemas estimulantes. Para os antigos gregos e egípcios eram ferramentas úteis. Na Grécia antiga, berço da Geometria enquanto ciência dedutiva, os sábios gregos depararam-se com enigmas que incidiam na busca da resolução de certos problemas com régua e compasso. Entre estes, ressaltamos os problemas da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo, cuja impossibilidade de resolução só foi provada no século XIX.

Os chineses inventaram o papel e, na idade média, no Japão, começou a ser desenvolvido um conjunto de técnicas de dobragens de papel, designado por Origami, que permitiam a construção de figuras com uma grande beleza estética. Já no século XX, estas técnicas despertaram o interesse de diversos matemáticos como: Humiaka Huzita, Kochiro Hatori e Robert Lang fixaram o sistema axiomático para as construções com dobragens. Do ponto de vista matemático, muito do interesse pelo Origami deve-se ao facto de ele possibilitar, através das sete operações básicas os axiomas de Huzita-Hatori, a resolução dos problemas clássicos da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo. Mais geralmente, dá-nos critérios para decidir que números são construtíveis com Origami.

A fim de atingir os objetivos a que nos propusemos, este artigo está estruturado da seguinte forma: No primeiro capítulo, apresenta-se um breve histórico da geometria visando compreender sua trajetória até os dias atuais. Os principais autores que embasaram este capítulo foram Eves (1997) e Boyer (1974).

No segundo capítulo, “Para que ensinar geometria! Que caminhos?”, ressalta-se a importância da geometria, procurando apresentá-la como uma ferramenta para auxiliar os estudantes a compreenderem, descrever o espaço onde vive, construir o pensamento lógico.

Pode-se dizer que a geometria desenvolve habilidades e competências para a melhor compreensão na resolução de problemas, possibilita ainda uma interpretação mais clara de conceitos matemáticos. A geometria está presente em diferentes etapas do desenvolvimento do ser humano. Na pesquisa buscou-se, principalmente, suporte teórico em Fainguelernt (1999) e Fonseca (2001).

No terceiro capítulo busca-se analisar e interpretar sobre as definições e os axiomas do origami propriamente dito axioma de Huzita- Hatori.

No quarto capítulo faz-se um estudo sobre a resolução dos problemas da duplicação do cubo e da trisseção de um ângulo, com base no referencial teórico assumido, elaboramos um texto conclusivo, buscando responder aos objetivos propostos nesta pesquisa.

1. GEOMETRIA E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Os primeiros conhecimentos geométricos que o homem teve, a respeito da geometria partiram das necessidades em compreender melhor o meio onde vivia. Motivo este que talvez justifique a origem da sua palavra, pois o termo "geometria" deriva do grego geo = terra + metria = medida que significa medição de terra.

De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos foi a noção de distância.

Ainda, segundo Eves (1997), foi das necessidades da sociedade, quando o homem teve de delimitar terras, que teve origem uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume, etc. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias.

Boyer (1974) no livro História da Matemática, faz colocações que descrevem a história da geometria que vem ao encontro do que diz Eves (1997), também descreve que a geometria teve sua origem no Egito, e seu surgimento veio da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. As inundações anuais sobrepunham-se sobre o Delta do referido rio. Ano após ano o Nilo transbordava seu leito natural, espalhando um rico limo sobre os campos ribeirinhos.

A inundação fazia desaparecer os marcos fixados no ano anterior, de delimitação entre as propriedades de terras. Para demarcarem novamente os limites existiam os "puxadores de corda", (assim chamados devido aos instrumentos de medida e cordas entrelaçadas que usavam para marcar ângulos, e determinar as áreas de lotes de terrenos, dividindo-os em retângulos e triângulos).

Os egípcios levavam os direitos de propriedade muito a sério e sem os marcos fronteiriços, tinham início muitos conflitos entre indivíduos e comunidades. Assim, sem as demarcações, os agricultores não tinham como saber qual era a sua propriedade, tanto para o cultivo, quanto para o pagamento de impostos aos governantes.

Segundo Mlodinow (2005), a cobrança de impostos, talvez tenha sido o primeiro motivo, para o desenvolvimento da geometria, pois o governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades. Aqueles que se recusavam a pagar podiam ser espancados pelos guardas, até que se submetessem.

Segundo Boyer (1974), os Egípcios tinham muita habilidade em delimitar terras e com isso descobriram e utilizaram inúmeros princípios. Um destes princípios era utilizado para marcar ângulos retos, onde usavam cordas cheias de nós equidistantes um do outro, fazendo assim a divisão das terras. Essa técnica empírica, para obter resultados aproximados, mais tarde viria a ser demonstrada pelo teorema de Pitágoras.

É importante lembrar que a geometria, de uma maneira mais rústica, foi utilizada na Babilônia, na China, entre outros países. Mas seu uso como ciência dedutiva surgiu no vale do rio Nilo, no Antigo Egito.

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesótris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total (Heródoto apud Eves 1997, p.3).

Segundo Eves (1997), nos primórdios, o homem só considerava problemas geométricos concretos, onde não se observava nenhuma ligação, cada problema era apresentado individualmente, só mais tarde que se tornou capaz de observar formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, e delas extrair certas propriedades que tinham relações com outras observações já vistas. Com isso os homens da época começaram a ordenar os problemas geométricos práticos em conjuntos, de tal forma que podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento. Assim chegou-se a noção da lei ou regra geométrica.

Da prática dos egípcios e Babilônios, com atividades ligadas à agricultura e engenharia no antigo Egito, deu-se o primeiro passo para o surgimento da geometria como ciência.

> Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado “geometria científica” uma vez que indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos eram instrumentos de descobertas. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre figuras sugeridas por objetos físicos (Eves, 1997, p. 3).

O desenvolvimento da geometria teve como base o povo egípcio e babilônio, mas, segundo Eves (1997), as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.C. diminuíram o poder dessas nações, passando os desenvolvimentos posteriores da geometria para os gregos. Para os gregos, os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínio dedutivo, eles transformaram a geometria empírica dos egípcios e babilônios em geometria demonstrativa.

Para Mlodinow (2005), os gregos valorizavam a busca do conhecimento e foi com seus matemáticos que a geometria foi estabelecida, começando com Tales de Mileto 640 a.C. e 564 a.C. Tales fez muitas viagens para o Egito, e lá passou longos períodos. Em uma dessas viagens, buscou explicações teóricas para o fato dos egípcios construírem as pirâmides, mas não terem conhecimento para medir a sua altura, com isso Tales deduziu técnicas geométricas, como propriedades de triângulos semelhantes para medir a altura da pirâmide de Quéops. Tales foi o primeiro a demonstrar teoremas geométricos, que, séculos mais tarde, se juntariam com os elementos de Euclides.

Conforme Garbi (2006), outro matemático que contribuiu significativamente para as descobertas matemáticas foi Euclides. Pouco se sabe sobre ele, nem mesmo onde e quando nasceu e morreu. É possível que tenha estudado na Academia de Platão, devido à semelhança entre a visão platônica do conhecimento e a visão de Euclides, e pelo desinteresse em aplicações práticas.

Euclides foi o primeiro a apresentar, a geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva. Ele não se limitou a anunciar um grande número de leis geométricas, mas preocupou-se em demonstrar esses teoremas. Operava a partir de hipóteses básicas e, com seus conhecimentos, adquiridos ao longo do tempo, estabelecem-se o conceito de lugar geométrico.

Euclides escreveu o clássico livro: “Os Elementos”, uma série de 13 livros que serviu de base para o ensino da geometria. Em sua obra, Euclides procurou fazer afirmações simples que seriam aceitas e entendidas por todas as pessoas, até por iniciantes.

> Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos (Garbi, 2006, p.49).

Conforme Eves (1997) Euclides, por volta do ano 300 a.C. coletou e arranjou proposições da geometria plana, apoiando-se num conjunto de cinco postulados, onde definiu retas paralelas, sendo este conhecido como “Postulado das Paralelas”.

2. PARA QUE ENSINAR GEOMETRIA! QUE CAMINHOS?

Ao observarmos as tarefas realizadas pelos estudantes angolanos no seu dia-a-dia percebemos que a Matemática é necessária para executar a maioria das tarefas. Portanto, é necessário que, no ensino superior, os estudantes possam fazer experiências matemáticas para assim incorporá-las como instrumentos para viver o cotidiano.

A Geometria é parte essencial da Matemática, sua importância é inquestionável tanto pelo ponto de vista prático quanto pelo aspecto instrumental na organização do pensamento lógico, na construção da cidadania, na medida em que a sociedade cada vez mais se utiliza de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se aprimorar.

Conforme Fonseca, (2001), ela está relacionada com a formação humana, pois promove valores culturais e estéticos, onde o aluno poderá compreender e apreciar construções e trabalhos artísticos feitos pelo homem e pela natureza.

Já para Fainguelernt (1999), a geometria é usada como ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos; é a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e que tem ligação com a realidade, uma ciência que permite ao aluno basear-se em ambientes reais para entender o pensamento geométrico, pois ela contribui para o desenvolvimento do raciocínio e permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive sendo essencial na formação do individuo.

Em conformidade com o autor, a Geometria oferece um vasto campo de idéias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual dos estudantes, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização, bem como ela é ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas.

O estudo da geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida (Fainguelernt,1999).

> Por tanto se pode afirmar que, sem conhecer a Geometria, a interpretação do mundo se torna incompleta. Portanto, pode-se utilizar a Geometria como facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Onde se pode afirmar que a missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho com comodidade e eficiência no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade (Santalo, 1996 apud Fainguelernt, 1999, p. 19).

A geometria permite ao estudante o desenvolvimento do pensamento, tornando capaz de demonstrar, argumentar, descobrir, experimentar e deduzir, e chegar a conclusões, onde o seu processo de ensino e aprendizagem da geometria depende das interações do aluno com o meio, pois o meio desempenha papel ativo no momento de aprender a mesma. Assim, as aulas de geometria contribuem para que o aluno identifique e relacione formas geométricas em diferentes locais. Elas são vistas e apreciadas em tudo que nos cerca. Assim para responder os caminhos que a geometria nos proporciona para a vida do estudante desde o nascimento e é parte integrante do seu desenvolvimento. Vem auxiliar a Matemática para a compreensão do mundo real e pode ser ainda, um excelente meio para que eles indicarem seu nível de compreensão, de raciocínio, e de suas dificuldades.

> As primeiras experiências das crianças são geométricas e espaciais, ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objeto de outro, [...]. Aprendendo a movimentar-se de um lugar para outro, estão a usar idéias espaciais e geométricas para resolver problemas. Esta relação com a geometria prossegue ao longo da vida. (Abrantes et. al., 1999 apud Fonseca, 2001, p. 73).

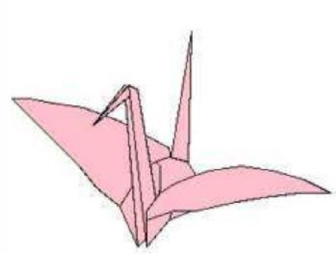
Para Lorenzato (1995), a geometria é um excelente apoio às outras disciplinas, como interpretação de mapas, gráficos estatísticos, conceitos de medidas. A imagem desempenha papel importante na aprendizagem, por isso, as representações de tabelas, fórmulas e enunciados, recebem uma interpretação mais fácil com apoio da geometria, que pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da ideia matemática.

Levando em conta os objetivos para o ensino da geometria, em alguns aspectos que utilizamos como melhorar a capacidade de medir, de pesquisar regularidades, base para futuros estudos, valores culturais e estéticos, e sendo a geometria presente em diferentes etapas do desenvolvimento do ser humano.

3. DEFINIÇÕES E OS AXIOMAS DO ORIGAMI

A palavra Origami surge da junção das palavras ori (dobrar) e kami (papel). Durante muito tempo, os métodos de construção eram transmitidos oralmente. Em 1787, foi publicado um livro (Hiden Senbazuru Orikata) que continha, pela primeira vez, instruções escritas para a dobragem de um pássaro do Japão.

Figura 1 - Pássaro sagrado do Japão (Tsuru).



Fonte- Internet[2]

[2] Disponível em: www.abdo.kit.net/ab

O origami tem muitas variações. Na versão mais comum, começa-se com uma folha de papel quadrada não marcada. É permitido apenas dobrar sem corte. O objetivo com a construção de origami consiste em localizar precisamente um ou mais pontos no papel, nas bordas da folha ou no seu interior. Esses pontos de referência são usados para definir as dobragens remanescentes que dão forma ao objeto final. O processo de dobrar o modelo cria uma sequência de pontos auxiliares ao longo da sua execução, que são gerados como interseções de retas.

3.1. Desenvolvimento axiomático do origami

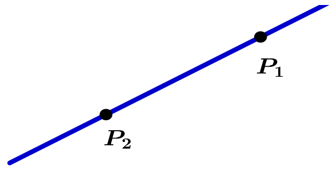
De seguida apresentam-se os sete axiomas de Huzita-Hatori, que vieram dar sustentabilidade à teoria Matemática do Origami.

"Afirmou que não são necessários mais axiomas e publica, numa das suas páginas da internet, um estudo onde justifica a sua convicção de que os sete axiomas de Huzita-Hatori definem o que é possível construir com dobragens" (Robert Lang, 2003, p. 234).

3.1.1. Os axiomas de Huzita-Hatori

1. Axioma 1: dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma dobragem que passa pelos dois pontos.

Figura 8- Axioma 1

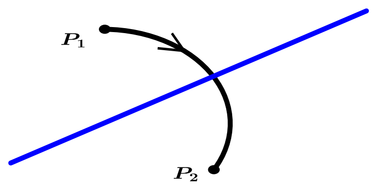


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a traçar uma reta por dois pontos dados.

2. Axioma 2: dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma dobragem que os torna coincidentes.

Figura 9- Axioma 2

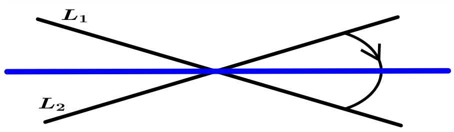


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a traçar a mediatriz de um seguimento dado.

1. Axioma 3: dadas duas rectas, L_1 e L_2, há uma dobragem que as torna coincidentes.

Figura 10- Axioma 3

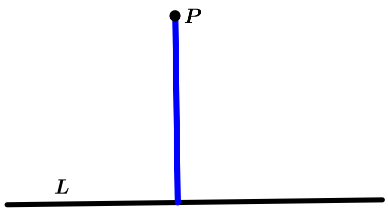


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a traçar a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas.

2. Axioma 4: dados um ponto P e uma reta L, há uma dobragem perpendicular a L que passa por P.

Figura 11- Axioma 4

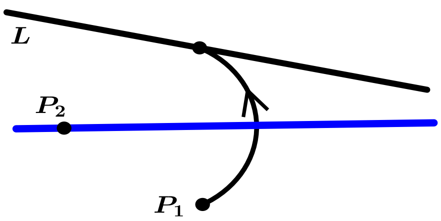


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a traçar a única reta perpendicular a L que passa pelo ponto P.

3. Axioma 5: dados dois pontos, P_1 e P_2, e uma reta, L, se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior distância de P_2 a L, há uma dobragem que faz incidir P_1 em L e que passa por P_2.

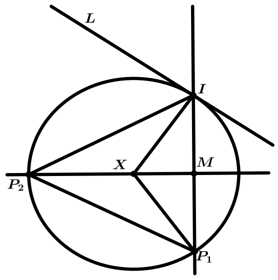
Figura 12- Axioma 5



Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a marcar sobre a reta L o ponto I de interseção entre a circunferência de centro em P_2 e raio $|P_1P_2|$ e a reta L.

Figura 13-Interpretação do axioma 5

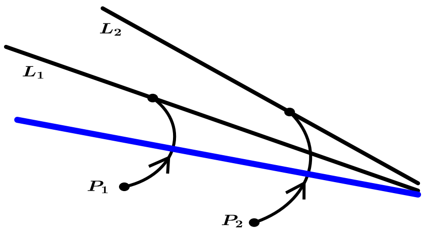


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Por outro lado, a reta de dobragem é a reta tangente parábola P de foco P_1 e diretriz L pelo ponto X obtido da seguinte forma: considera-se a perpendicular reta L pelo ponto I e seja X o ponto de interseção entre esta reta e a reta da dobragem; uma vez que a reta da dobragem é a mediatriz do segmento IP_1 e passa por X, pelo critério LAL, os triângulos XIM e XP_1M são congruentes. Logo $|XI| = |XP_1|$, isto é, X pertence parábola P.

4. Axioma 6: dados dois pontos, P_1 e P_2, e duas retas, L_1 e L_2, existe uma dobragem que faz incidir P_1 em L_1 e P_2 em L_2.

Figura 14- Axioma 6

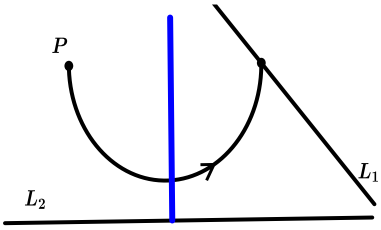


Fonte- Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: A reta de dobragem é, simultaneamente, tangente parábola P_1 de foco em P_1 e diretriz L_1 e tangente parábola P_2 de foco em P_2 e diretriz L_2. Tal pode ser facilmente compreendido a partir da observação do axioma 5.

5. Axioma 7: Dado um ponto P e duas retas L_1 e L_2 se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em L_1 e é perpendicular a L_2.

Figura 15- Axioma 7



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: Corresponde a marcar um ponto X de intersecção entre a reta L_1, e a reta paralela L_2 pelo ponto P. A reta de dobragem é precisamente a mediatriz do seguimento PX.

4. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS COM ORIGAMI

Estuda-se a resolução do problema da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo com Origami. "Algebricamente, estes problemas correspondem a resolver equações cúbicas relacionadas com a tangente comum a duas parábolas. Prova-se mais geralmente que é possível construir uma solução de qualquer equação cúbica com Origami" (Geretschlager, 1995, pp. 257-371).

4.1. Problemas clássicos: origem e aspetos históricos

O problema da duplicação do cubo consiste em construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado e o problema da trissecção de um ângulo consiste em dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais. São dois dos três problemas clássicos da matemática grega que têm sido um motivo de inspiração dos matemáticos desde os tempos de Hippias de Elis (século V a.C.) até aos dias atuais. O mundo origamístico também tem a sua participação nestes dois problemas. Segundo revelam os documentos antigos, as primeiras alusões ao surgimento destes problemas remetem a cerca de 429 a.C., quando uma peste exterminou um quarto da população de Atenas. No propósito de cessar a peste, os atenienses, desesperados, enviaram uma delegação para perguntar ao oráculo de Apolo, em Delos, de que maneira se poderia acabar com a peste. Em resposta, o oráculo terá respondido que, se duplicassem o altar cúbico de Apolo, o problema seria sanado. Os atenienses dobraram a aresta do altar, pensando que tinham satisfeito a vontade de Deus, mas de facto multiplicaram o seu volume por oito.

> A prova da impossibilidade da construção por régua não graduada e compasso surgiu no século XIX. O argumento final foi colocado pelo matemático francês Pierre Laurent, em 1837. No entanto, como vamos ver neste capítulo, é possível construir a solução para o problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo através do Origami (King, 2004, p. 12).

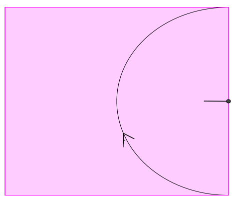
4.2. Resolução do problema da duplicação do cubo

> "A solução seguinte foi feita pela primeira vez por Peter Messer" (Jorge Lucero, 2006, pp. 25-28)[3].

Partimos de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária e efectuamos os seguintes passos:

1. Marcar o ponto médio da margem direita da folha quadrada do papel (axioma2).

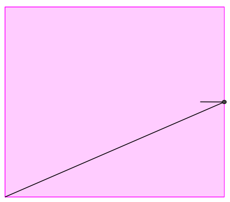
Figura 16 - Ponto médio da margem direita



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

2. A partir do ponto médio da margem direita da folha quadrada do papel, traçar uma reta até ao canto inferior esquerdo (axioma 1).

Figura 17-Reta do ponto médio ao canto inferior esquerdo

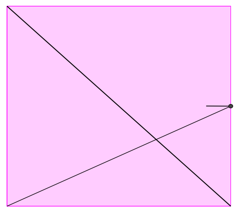


Fonte: Elaborado pelo Geogebra

[3] Jorge, C. L. (2006) www.mat.unb.br/ Lucero, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília.

3. Traçar uma diagonal a partir do canto superior esquerdo até ao inferior direito (axioma1).

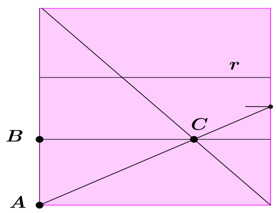
Figura 18-Diagonal da folha



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

4. Traçar uma reta perpendicular margem direita a passar pelo ponto de intersecção (axioma4). Fazer a margem superior coincidir com esta reta perpendicular (axioma 3). Assim, se pode notar que as linhas dobradas horizontais dividem a folha em três partes iguais.

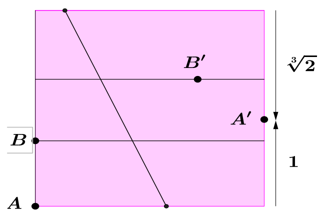
Figura 2-Folha dividida em três partes iguais



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

5. Dobrar de forma que o ponto *A* que sobre a margem direita, ponto A^0, e o ponto *B* sobre a linha horizontal *r*, ponto B' (axioma 6). O ponto A' $\sqrt[3]{2}$ divide a margem direita na razão de 1 para $\sqrt[3]{2}$, como de seguida passaremos a demonstrar.

Figura 30 - Resolução do problema da duplicação do cubo



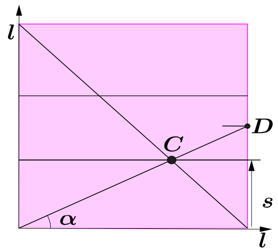
Fonte: Elaborado pelo Geogebra

Primeiro demonstraremos que a sequência de passos de 1 a 5 divide a folha de papel em três partes iguais. O seguinte diagrama reproduz o resultado após o passo 4. Temos colocado um par de eixos cartesianos *x* e *y*, com a origem no canto inferior esquerdo. O comprimento dos lados da folha é *l* (ver Fig. 21).

O ponto C está mesma distância das margens inferior e da margem direita, uma vez que ele se encontra sobre a diagonal do quadrado. Designaremos esta distância por s. Portanto, as coordenadas de C são dadas por:

$$(x_C, y_C) = (l - s, s).$$

Figura 21-Folha após passo 5



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

As coordenadas do ponto médio D da margem direita são

, $\tan(\alpha) = \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l-s}$ $\tan(\alpha) = \frac{y_D}{x_D} = \frac{l}{2}$

$(x_D, y_D) = (l, \frac{l}{2})$, podemos então dizer que

.

Igualando as equações, teremos

$\frac{s}{l-s} = \frac{l}{2}$, logo, isolando s obteremos

$$s = \frac{l}{3}.$$

Isto significa que as duas retas horizontais dividem a folha em três retângulos iguais. Agora demonstraremos que a dobragem do passo 5 determina o comprimento $\sqrt[3]{2}$ sobre a margem direita da folha. Para isso, colocamos novamente um par de eixos cartesianos x e y, com a origem no canto inferior esquerdo da folha. Os pontos A e B têm coordenadas

$(x_A, x_A) = (0,0)$, , $(x_B, y_B) = (0, \frac{l}{3})$ $(x_{B'}, y_{B'}) = (a, \frac{2l}{3})$

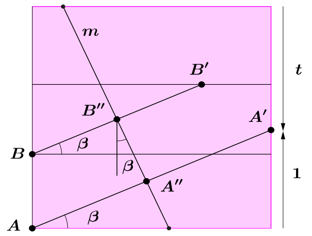
respetivamente. Fixamos a unidade de comprimento de modo a que as coordenadas de A' e B' sejam dadas por

$(x_{A'}, y_{A'}) = (l,1)$, onde a designa a abscissa do ponto B', por enquanto desconhecida.

Os pontos A'' e B'' sobre a linha *m* de dobragem (ver figura 24), são os pontos médios dos segmentos AA' e BB', respetivamente, e têm coordenadas:

$$(x_{A''}, y_{A''}) = (\frac{l}{2}, \frac{1}{2}).$$

Figura 22-Pontos médios de dobragem



Fonte: Elaborado pelo

Pela geometria da figura, os três ângulos indicados, com vértices em *A*, *B* e B'', são iguais. Designamos a medida desse ângulo por *beta*. Podemos expressar o valor de tan(β) de três formas distintas:

$$\tan(\beta) = \frac{y'_A - y_A}{x'_A - x_A} = \frac{1-0}{l-0} = \frac{1}{l} \tag{2.1}$$

$$\tan(\beta) = \frac{y'_B - y_B}{x'_B - x_B} = \frac{\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}}{a-0} = \frac{l}{3a} \tag{2.2}$$

$$\tan(\beta) = \frac{x''_A - x''_B}{y''_B - y''_A} = \frac{\frac{l}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{l}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{l-a}{l-1} \tag{2.3}$$

Igualando as duas equações (2.1) e (2.2), teremos:

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \Longrightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Da mesma forma, igualando as equações (2.1) e (2.3), e tomando o valor de *a* desta última equação, resulta que:

$$\frac{1}{l} = \frac{l - \frac{l^2}{3}}{l-1} \Longrightarrow l - 1 = \frac{3l^2 - l^3}{3}$$, logo

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

Esta equação cúbica pode também ser escrita na forma

$(l-1)^3 - 2 = 0$, logo, substituindo $t = (l-1)$,

obtemos $t^3 - 2 = 0$, ou seja,

$$t = \sqrt[3]{2}$$

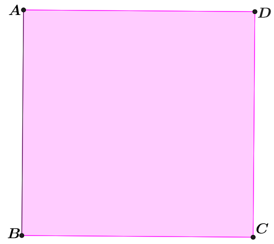
O que prova a solução do problema da duplicação do cubo com o Origami.

4.3. Resolução do problema da trisseção do ângulo

Segue abaixo a demonstração da trisseção do ângulo, partimos de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária e efectuamos os seguintes passos conforme (Suzuki, 2006, p. 33).

1. partimos de uma folha quadrada de papel *ABCD*;

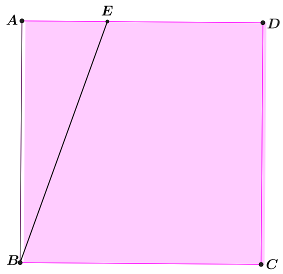
Figura 23- Folha quadrada do papel.



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

2. marcamos um ponto *E* na borda superior *AD* do quadrado, traçamos o segmento de reta *BE* e consideremos o ângulo agudo $\angle EBC > 45^{o}$, o qual queremos trissectar;

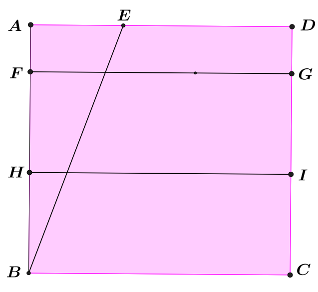
Figura 24- Dobragem de um ângulo agudo



Fonte: Elaborado por Geogebra

3. traçamos uma reta paralela *FG* a *AD* (Axioma 4), e traçamos uma reta paralela *HI* a *FG*, onde *H* e *I* são os pontos médios dos segmentos de retas *BF* e *CG*, respetivamente (Axioma 3);

Figura 25- Dobragem de pontos médios dos segmentos BF e CG

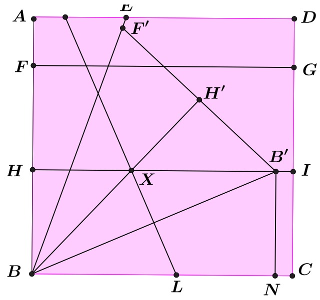


Fonte: Elaborado pelo Geogebra

Interpretação: realizamos uma dobragem levando o ponto *F* ao segmento de reta *BE* e o ponto *B* ao segmento de reta *HI* (Axioma 6) e marcamos os pontos B', F' e H' que são as reflexões dos pontos *B*, *F* e *H* relativamente reta de dobragem *L*;

4. as retas BH' e BB' dividem o ângulo $\angle EBC$ em três partes iguais, como se irá justificar de seguida.

Figura 26-Dobragem de triângulos congruentes



Fonte: Elaborado pelo Geogebra

Como uma reflexão é uma isometria e, por construção, $|BH| = |HF|$, temos

$$|BH| = |B'H'| = |H'F'|.$$

O ponto *X* de interseção das diagonais do quadrilátero $BB'H'H$ está necessariamente sobre a reta *L*, que é mediatriz dos segmentos BB' e HH'. Então, pelo critério LAL, os triângulos *BHX* e $B'H'X$ são congruentes. Logo $\angle BH'B' = 90^{o}$. Seja *N*, a projeção ortogonal de B' sobre o lado *BC*. Pelo critério LAL, vemos que os triângulos BNB', $BH'B'$ e $BH'F'$ são congruentes. Em particular, os três ângulos em *B* são iguais, como quer amos justificar.

5. CONCLUSÃO

Para além do Origami assumir um papel inesperado na resolução dos dois problemas clássicos da geometria grega no ensino Angolano, onde estes problemas correspondem a resolver equações cúbicas relacionadas com a tangente comum a duas parábolas, ele envolve conteúdos matemáticos muito profundos, desde a sua axiomática, caracterização do corpo dos números construtíveis. Permita-nos armar que o Origami pode também constituir um importante auxílio metodológico no processo de ensino-aprendizagem da geometria no sistema Angolano. De facto, ele oferece um contexto que permite elaborar diferentes atividades para a sala de aula, a diversos níveis de ensino, que permitam trabalhar conhecimentos geométricos adquiridos. Neste artigo, não nos focamos nesta vertente, mas a matéria te rica desenvolvida é uma base importante para desenvolvimentos dos novos programas de Matemática na vertente da Geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Associação B. Origami (2010). *A História do Origami*. Disponível em: www.abdo.kit.net/abdo/historia.html.

Boyer. B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, Ltda.

Earl, W. S. (1994). *Cálculo com Geometria Analítica*. Sao Paulo: Makron Books.

Eves, H. (1997). *Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula* (H. H. Domingues, Trad.). São Paulo: Atual.

Fainguelernt, E. K. (1999). Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed.

Fonseca, S. (2001). *O ensino da geometria na escola fundamental: Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntic.

Garbi, G. (2006). *A Rainha das Ciências. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física.

Geretschlaeger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. Mathematics Magazine, 68(5), 357-37

Lorenzato, S**.** (1995). Por que não ensinar Geometria? *A educação matemática em revista. Geometria, SBEM*, 3(4), 3-13, 1995.

Mlodinow, L. (2005). *A Janela de Euclides. A História da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço*. São Paulo: Geração.

Soraya, S. S. (2006). *Geometria Descritiva e Desenho Geométrico*. (Tese de Mestrado em Matemática, Estatística e Computação Científica). Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Suzuki, R. M. (2006). A geometria do origami. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC.