© EUROPEAN REVIEW OF ARTISTIC STUDIES 2020, vol. 11, n. 1, pp. 1-14 ISSN 1647-3558

https://doi.org/10.37334/eras.v11i1.218

A MATEMÁTICA ESCONDIDA NA ARTE DE ENROLAR E DESENROLAR LENÇOS NAS CABEÇAS DAS MULHERES ANGOLANAS: Um recurso didáctico para a aprendizagem da função seno e a sua inversa na perspetiva da Matemática Realística

THE MATHEMATICS HIDDEN IN THE ART WHEN ROLLING AND UNROLLING HEADSCARVES ON ANGOLAN WOMEN'S HEADS: A didactic resource for learning the sine function and its inverse in the perspective of Realistic Mathematics

CASSELA, Ezequias Adolfo Domingas[1]

Resumo

O presente artigo explorou o potencial de uma arte inerente ao enrolar e desenrolar de lenços nas cabeças das mulheres angolanas, com o objetivo de extrair ideias matemáticas na respetiva arte, para aferir um recurso didático que desperte a motivação dos alunos na aprendizagem da função seno e da sua inversa. Foi seguida a abordagem relacionada com a Educação Matemática Realística (EMR). O mesmo está encaminhado a responder a seguinte questão científica: qual é o potencial das ideias matemáticas escondidas na arte de enrolar e desenrolar lenços nas cabeças das mulheres angolanas? Para tal, aproveitam-se algumas experiências, através de equações e transformações geométricas bidimensionais, motivadas por duas questões importantes levantadas por Apostol num estudo relativamente recente, sobre enrolar e desenrolar de curvas em superfícies cilíndricas, com o objetivo de sedimentar o rigor científico na atitude do investigador-observador.

Abstract

The present Article explored the potential inherent of an Art when rolling and unrolling headscarves on Angolan women's heads, with a aim to extract mathematical ideas on the respective arts, to access an didactic resource which awakens students motivation when it comes to learning about sine function and it's inverse . It was followed an approach related with Realistic Mathematic Education (RME). The Same is forwarded to answer the following scientific questions : what is the potential of Mathematics ideias hidden on the rolling an unrolling Art headscarves on Angolan women's? for such ,take vantage of some experiences ,because of Equations and two-dimensional geometrical transformations, motivated with two important questions raised by Apostol study relatively recent ,about roll and unrolling of curves of the cylindrical surfaces with a sedimentary aim with scientific accuracy on the attitude of the observant researcher.

Palavras-chave: *Enrolar e desenrolar lenços; Educação Matemática realística; Função seno e sua inversa.*

Key-words: *To bend and unfold scarves; Realistic Mathematical Education; Sine function and its inverse.*

Data de submissão: janeiro de 2010 | **Data de publicação**: março de 2020.

[1] EZEQUIAS ADOLFO DOMINGAS CASSELA – Escola Superior Pedagógica do Bié, ANGOLA. E-mail: ezequiasadolfo@hotmail.com.

INTRODUÇÃO

Angola é um país plurilinguístico onde o português é a língua oficial e de comunicação, no universo das diferentes línguas nacionais como por exemplo: Umbundu, Kimbundu, Kikongo, Tchokwé, Nganguela, entre outras. Situa-se na África Austral, com uma superfície de 1.246.700 km^2 e faz fronteira a norte com as Repúblicas do Congo Brazavile e da República Democrática do Congo, a este com a República da Zâmbia, a sul com a República da Namíbia e a oeste tem o Oceano Atlântico. Foi durante o período de 1482 a 1975 uma colónia portuguesa. Tornou-se independente fruto de uma guerra de libertação nacional iniciada em 1961, que culminou com a proclamação da independência a 11 de Novembro de 1975. Mas logo depois da sua independência (1975), o país conheceu outro período de guerra civil, que terminou a 4 de Abril de 2002.

Esta situação influenciou negativamente o desenvolvimento progressivo da ciência em Angola, em particular da Matemática, fazendo com que dependesse unicamente de conhecimentos produzidos pelos outros países. Tal realidade obrigou o país a importar currículo, o que, por sua vez, tirou espaço à matemática de contexto, aprendida e desenvolvida fora da escola, provocando em muitos alunos um sentimento de completa dependência.

Movido pela intenção de superar esta fase, o governo angolano leva a cabo profundas reformas na sua política de governação e em particular no sistema educativo, tendo sempre como premissa a formação multifacetada dos cidadãos para que possam atuar criativamente e estejam aptos para construir uma nova sociedade e defender as conquistas alcançadas, tal como se verifica na Lei de Bases do Sistema Educativo angolano, Lei 17/16 de 7 de Outubro, aprovada em 2016 pela Assembleia Nacional da República.

> (...) formar um indivíduo capaz de compreender os problemas nacionais, regionais e internacionais de forma crítica e construtiva para a sua participação ativa na vida social, à luz dos princípios democráticos (Assembleia Nacional de Angola, 2016).

Por isso a Escola e em particular as instituições de ensino superior devem ser capazes de contribuir para a formação integral dos cidadãos, pelo que é necessário que o processo de ensino-aprendizagem se relacione com o contexto sociocultural e produtivo do aluno, de tal forma que se possam levar discussões nas aulas relativas aos problemas da prática social.

Esta perspectiva requer a inclusão dos contextos locais, históricos e culturais no ensino e aprendizagem da Matemática, que por sua vez, sugere a matematização de atividades culturais. Facto que levou o autor deste artigo a adoptar para este estudo a abordagem relacionada com a Educação Matemática Realística (EMR). As ideias transportadas neste artigo pretendem dar resposta a seguinte questão: qual é o potencial das ideias matemáticas escondidas na arte de enrolar e desenrolar lenços nas cabeças das mulheres angolanas? Por esta razão, este artigo objetiva-se em extrair ideias matemáticas na arte de enrolar e desenrolar lenços nas cabeças das mulheres angolanas, para aferir um recurso didático que desperte a motivação dos alunos na aprendizagem da função seno e da sua inversa.

Neste sentido, para este estudo, foi escolhido um livro de Apostol (2012, pp. 83-90), de publicação relativamente recente (2012), com um nome sugestivo e significativo neste âmbito - Novos Horizontes em Geometria. Portanto, este artigo está dividido em três capítulos: no primeiro capítulo, apresenta-se um breve resumo sobre a Educação Matemática Realística (EMR), do ponto de vista histórico, no segundo capítulo analisam-se algumas experiências, através de equações e transformações geométricas bidimensionais, motivadas por duas questões importantes levantadas num estudo desenvolvido pelo referido autor sobre enrolar e desenrolar de curvas em superfícies cilíndricas, cujo objetivo é sedimentar o rigor científico na atitude do investigador-observador; no terceiro capítulo aproveita-se este resultado para ser ilustrado no processo de enrolar e desenrolar de lenços nas cabeças das mulheres angolanas.

1. SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Os pressupostos teóricos inerentes a Educação Matemática Realística (EMR) adaptados neste capítulo seguem as referências de Ferreira e Buriasco (2016), os quais a concebem como uma abordagem voltada ao ensino, desenvolvida pelos professores Holandeses inspirados nas ideias de Hans Freudenthal (1905-1990) entre o final da década de 1960 e começo dos anos de 1970. A visão original que motivou o surgimento desta abordagem tem a ver com o desenvolvimento de uma reforma educacional que procurava modernizar a Educação matemática daquele país, opondo-se à perspectiva de um ensino mecânico e estruturalista. Nos estudos feitos pelos referidos autores o matemático alemão Hans Freudenthal, que desenvolveu interesse em Matemática, Ciências e Literatura, é tido como percursor desta abordagem.

A Educação Matemática Realística opõe-se à um ensino que limita o aluno ao treino de procedimentos rotineiros e de algoritmos algébricos, desprovidos de atividades que motivam o aluno a explorar os problemas relacionados com a sua própria realidade. Estas ideias estão pautadas no pensamento de Freudenthal, conforme se constata no seguinte argumento. "(...) A Matemática deve ser conectada com a realidade, estar próxima dos alunos, ser relevante para a sociedade e ser de valor humano" (Ferreira & Buriasco, 2016, p. 241).

Este autor defende a Matemática como uma atividade humana, onde os alunos devem ter a oportunidade "guiada" para reinventá-la, em lugar de serem considerados como receptores de uma matemática já "pronta" e "acabada". Por outro lado, argumenta que, se os alunos aprenderem a Matemática de forma isolada, divorciada de suas experiências, ela será esquecida e não serão capazes de aplicá-la. Para este autor os alunos têm maior chance de aprender a Matemática construindo-a, reinventando-a, recriando-a. Nesta conformidade apresenta os seguintes pontos para aquilo que ele acredita ser Educação Matemática:

- a Matemática como Atividade humana;
- ensino e aprendizagem como Princípio de Reinvenção;
- aprendizagem matemática por meio da Matematização;
- reinvenção de ferramentas matemáticas por meio da matematização progressiva.

O foco inerente a abordagem apresentada neste artigo, recaí fundamentalmente a aprendizagem matemática por meio da matematização na qual Freudenthal "considera a Matemática não como o corpo do conhecimento matemático, mas como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de forma mais geral, como a atividade de organizar "matematicamente" a realidade" (Van den Panhuizen 1996 citado por Ferreira & Buriasco 2016, p. 246). Para este autor aprender Matemática deveria ter origem no "fazer" matemática, sendo a matematização o núcleo da Educação Matemática.

Rosa e Orey (2010, p. 868), por sua vez acreditam que "a matematização é o processo por meio do qual os membros de diferentes grupos culturais utilizam distintas ferramentas matemáticas que podem auxiliá-los a organizar, analisar, compreender, entender, modelar e resolver situações problemas específicas que são enfrentadas no cotidiano".

Tais ferramentas permitem a identificação e a descrição de práticas matemáticas escondidas em diferentes atividades da realidade que podem ser extraídas e transferidas do mundo real para os conceitos matemáticos da academia por meio da matematização. Neste sentido, uma atividade de base cultura, para além de ser um dos símbolos de beleza no seio das mulheres angolanas foi escolhida, que é a arte de enrolar e desenrolar lenços.

Fig. 1 - Mulheres angolanas.

Fonte: Internet.[2]

Amarrar lenços na cabeça é uma das práticas mais comuns das mulheres angolanas. A ênfase do estudo ligado ao enrolar e desenrolar destes lenços, na perspectiva de extração de ideias matemáticas, recaí fundamentalmente nos motivos e grafismos que os mesmos apresentam, e pela forma que os mesmos adoptam quando os lenços são enrolados ou desenrolados, o que motiva a elaboração das seguintes questões:

- será que os grafismos e padrões que observamos nos lenços enrolados podem ser também objeto de matematização consciente? Ou mesmo a forma como esses lenços são usados e que visualizações dos seus motivos possibilitam?
- Que ideias matemáticas podem estar presentes nesta arte?
- Podemos estudar novos conteúdos científicos motivados por estes possíveis objetos de mediação de uma aprendizagem?

É nesta ordem de ideias que para se desenvolver o "olhar matemático" relativo a extração de ideias matemáticas escondidas na arte de enrolar e desenrolar lenços nas cabeças das mulheres angolanas, desenvolve-se em seguida um estudo que segue as referências do livro de Apostol (2012, pp. 83-90), sobre enrolar e desenrolar cilindros, cujo resultado será ilustrados na arte de enrolar e desenrolar lenços.

[2] Disponível em: https://www.bing.com/images/search?q=imagem+da+mulher+angolana&qpvt=imagem+da+mulher+angolana&FORM=IGRE

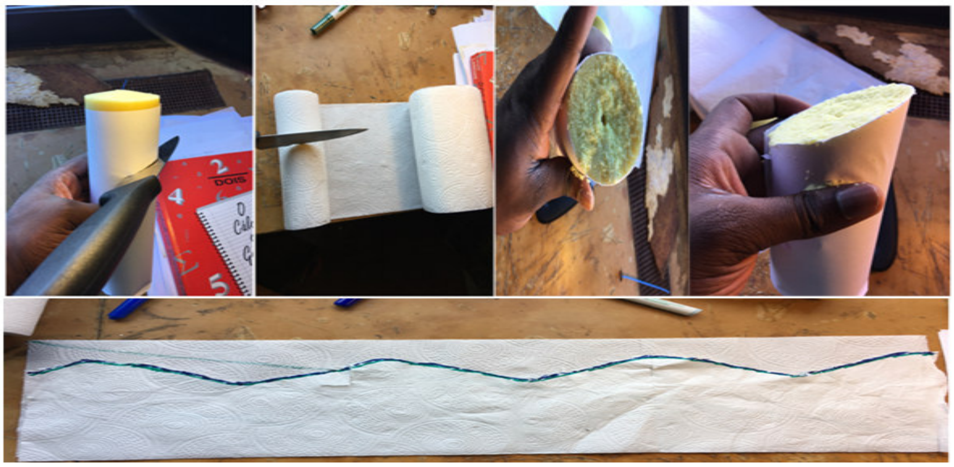
2. SOBRE O ENROLAR E DESENROLAR DE CURVAS EM SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

O resultado encontrado no livro do autor mencionado se propõe em dar resposta a duas questões:

- o que acontece à forma de uma curva desenhada na superfície de um cilindro quando desenrolamos o cilindro num plano?
- quando desenhamos um segmento de reta num papel ou num tecido qualquer e enrolamos em volta de cilindros de raios diferentes, qual é a configuração da curva vista de diferentes direções?

Começando por analisar a situação imposta pela primeira questão. Se quer fazer o estudo da curva que resulta da interseção de um plano com um cilindro de base circular escolhendo para o plano uma inclinação que faça um ângulo β, com $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ paralelo ao da curva diretriz (circunferência de raio r).

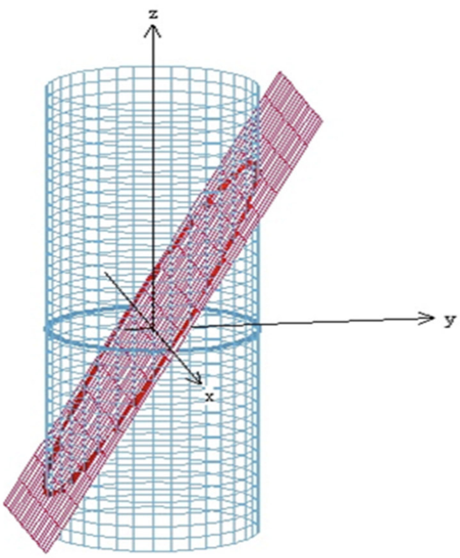
Fig. 2 - Papel de cozinha enrolada numa vela cilíndrica.

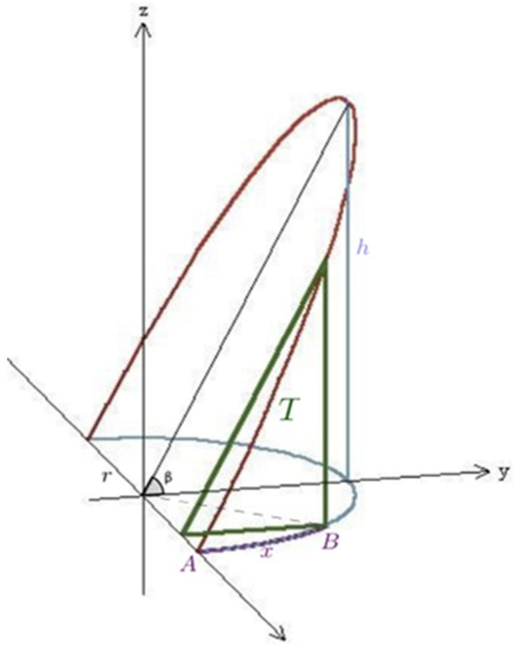


Fonte: Própria.

Parece ser uma curva sinusóide. Consideremos agora a seguinte representação que ilustra a interseção do plano de corte com o diâmetro de uma secção circular paralela à diretriz de um cilindro de raio r (1ª imagem da Fig. 3). Se fizermos um corte vertical por um plano paralelo ao eixo maior da elipse, como mostra a figura da direita, a interseção com a cunha cilíndrica será um triângulo retângulo T com outro ângulo da base β.

Fig. 3 - Interseção do plano de corte com o diâmetro





Fonte: Elaborados no wplotpr

Mostraremos de seguida que o triângulo T, ilustrado na figura da direita, tem base com comprimento $r\sin\frac{x}{r}$ e altura $h\sin\frac{x}{r}$:

Nos passos que se seguem, mostraremos porque é que o comprimento da base de T é $r\sin\frac{x}{r}$ e a sua altura é $h\sin\frac{x}{r}$.

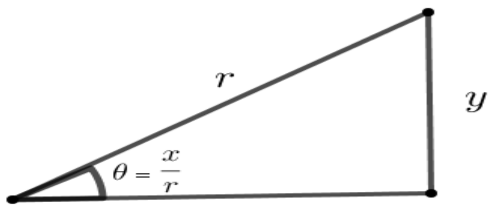
Comecemos por demonstrar o comprimento da base de T

- Seja θ o ângulo que subentende o arco AB cujo cumprimento é x, e y o comprimento da base de T e cateto oposto do triângulo retângulo inscrito no sector semicircular da base com vértice na origem. Buscando uma relação entre θ e x sabendo que θ está para 2π e x está para $2\pi r$ temos:

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{x}{2\pi r} \Longleftrightarrow x = \theta r \Longleftrightarrow \theta = \frac{x}{r}$$

Analisando o triângulo inscrito no setor circular

Fig. 4 - Triângulo inscrito no sector circular.



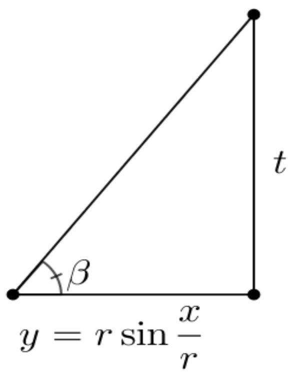
Fonte: Elaborado no Geogebra.

Temos: $$\sin\frac{x}{r} = \frac{y}{r} \Longleftrightarrow y = r\sin\frac{x}{r}$$

Como y é o comprimento da base de T, segue-se que o comprimento da base de T é $r\sin\frac{x}{r}$.

- Sobre a altura de T, temos: seja t o cumprimento da altura, com a base $r\sin\frac{x}{r}$ Como mostra a Figura abaixo.

Fig. 5 - Triângulo T.



Fonte: Elaborado no Geogebra.

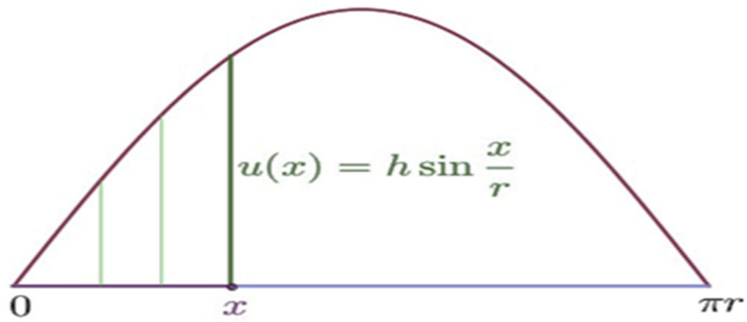
Na Figura 3, especificamente a da direita é possível verificar que o triângulo T é semelhante ao triângulo com a altura $h > t$, (pelo critério AA), logo os seus lados são proporcionais.

$$\frac{t}{h} = \frac{r\sin\frac{x}{r}}{r} \Longleftrightarrow t = h\sin\frac{x}{r}$$

Então a altura deste triângulo é $h\sin\frac{x}{r}$ onde $h = rtan\beta$, obtida com base no triângulo maior.

Ainda é possível verificar que quando desenrolamos a parede do cilindro num plano, a base semi-circular desenrola-se num segmento de reta que consideramos estar no eixo x. Na seguinte figura, adaptada do referido autor, mostra-se a configuração da porção da parede do cilindro limitada pelo arco de circunferência de medida x, pelo cateto oposto de cada triângulo T e pela curva da elipse, quando desenrolada no plano.

Fig. 6 - Parede do cilindro desenrolada ao logo do eixo x



Fonte: Elaborado no Geogebra

O que quer dizer que a curva desenrolada é o gráfico de $u(x) = hsin\frac{x}{r}$. Isto leva a concluir que quando se desenrola cilindros, a função representada é uma função seno.

Quanto à segunda questão, que inclui a visualização numa parede cilíndrica no espaço de uma reta desenhada no plano e enrolada à volta do cilindro, apresentamos uma ilustração do seguinte Teorema:

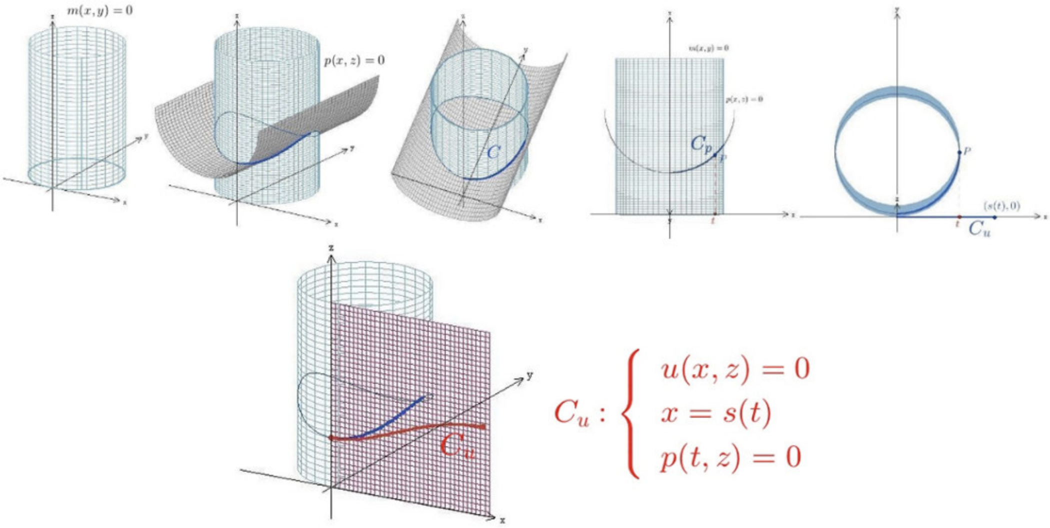
Num cilindro circular direito do raio r, seja C uma curva na parede do cilindro definida pelo perfil Cp de um cilindro de corte horizontal e seja Cu sua imagem desdobrada. Então, a equação do perfil $p\,(t, z) = 0$ para Cp e a equação de desdobragem

$u(x, z) = 0$ para Cu estão relacionados por

$$u(x, z) = p(r \sin \frac{x}{r}, z) \qquad p(t, z) = u(r \ \arcsin \frac{t}{r}, z)$$

Demonstração:

Fig. 7 - Parede do cilindro desenrolada ao logo do eixo x.

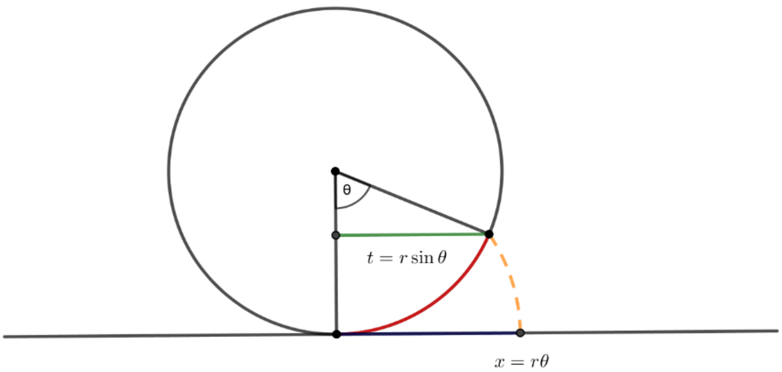


Fonte: Elaborados no wplotpr.

Consideremos a interseção de dois cilindros, um dos quais é o principal e o outro o de corte, como mostra a segunda Figura. Tenhamos em conta que o cilindro principal é um cilindro circular direito de raio r.

Seja C uma curva no cilindro principal e Cp o seu perfil horizontal que tangenciam o plano de visualização xz. Seja Cu a curva desdobrada, obtida pelo rolar do cilindro ao longo do plano de desdobragem. Um arco de comprimento circular $r\theta$, está desembrulhado num segmento de comprimento x, como mostra a Figura que se segue.

Fig. 7 - Parede do cilindro desenrolada ao logo do eixo x.



Fonte: Elaborados no wplotpr.

Na Figura 6 é possível verificar que a projeção horizontal tem comprimento

$t = rsin\theta$ onde $\theta = \frac{x}{r}$ porque: $\frac{x}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow x = r\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{x}{r}$

Imaginemos cada ponto P no perfil do cilindro principal descrito em termos de parâmetros novos t e $s(t)$, onde $s(t)$ é a função do comprimento do arco da porção do perfil que une P à origem, e t a projeção desse arco sobre o eixo x. Ao desenrolar, esse cilindro imprime P num ponto do plano xz com coordenadas $(s(t), z)$, onde z satisfaz a equação de perfil $p(t, z) = 0$. Consequentemente, a equação de desdobragem é

$u(x, y) = 0$, onde x e z estão relacionados com $x = s(t)$ e $p(t, z) = 0$.

Trabalhando a função do comprimento do arco $r = s(t)$, temos:

$$x = s(t) = r\theta$$

Como $t = r \sin \theta$, vem:

$$\theta = arc \sin \frac{t}{r}$$

Substituindo θ na primeira equação, vem:

$$x = rarc \sin \frac{t}{r}$$

buscando a sua inversa $t = s^{-1}(x)$, temos:

$$\sin arc \sin \frac{t}{r} = \sin \frac{x}{r} \Leftrightarrow t = r \sin \frac{x}{r}$$

Para a curva C de interseção entre as duas superfícies, a equação de perfil $p(t, z) = 0$ de Cp e a equação de desdobragem $u(x, z) = 0$ de Cu estão relacionadas por

$$u(x, z) = p(s^{-1}(x), z)$$
$$p(t, z) = u(s(t), z)$$

Onde $x = rarc \sin \frac{t}{r}$ e $t = r \sin \frac{t}{r}$. Daí segue:

$$u(x, z) = p(r \sin \frac{x}{r}, z)$$

Como queria $p(t, z) = u(rarc \sin \frac{t}{r}, z)$

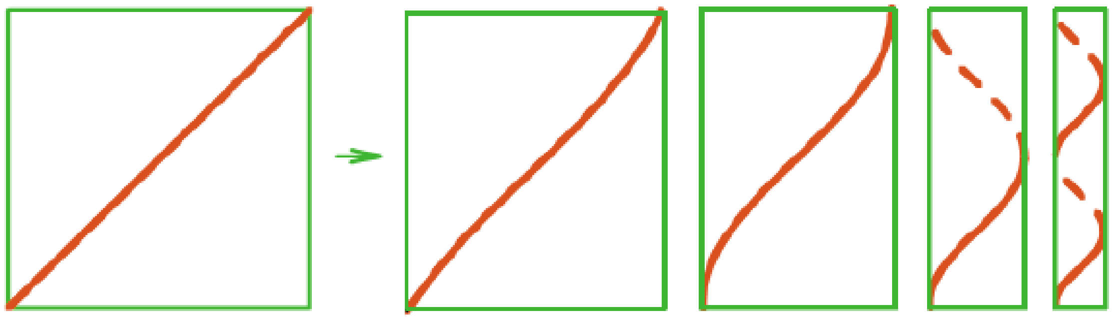
Vamos agora ilustrar este resultado na arte de enrolar e desenrolar lenços nas cabeças das mulheres angolanas.

3. SOBRE A MATEMÁTICA ESCONDIDA NA ARTE DE ENROLAR E DESENROLAR LENÇOS

Para melhor ilustração, pode-se considerar o seguinte exemplo.

Um segmento de reta num cilindro circular fica definido pela função $u(x) = cx$ e enrola-se num arco geodésico na superfície do cilindro. O perfil deste arco geodésico faz parte de uma curva de arco-seno como mostra a seguinte figura.

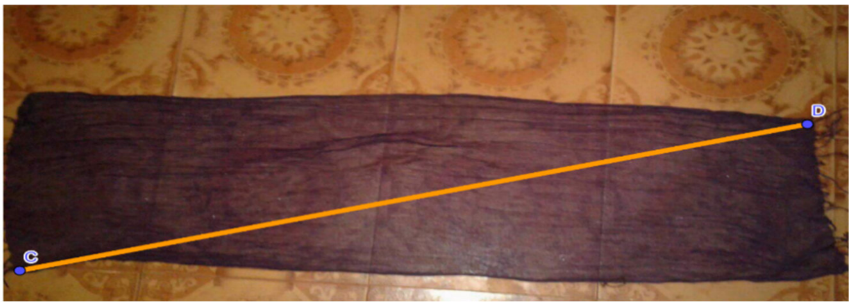
Fig. 8 – Segmento desenhado num papel enrolado no cilindro.



Fonte: Apostol (2012).

Isto explica o que acontece ao segmento $\overline{CD}$ desenhado no lenço da seguinte figura quando uma mulher o enrola na cabeça.

Fig. 9 - Segmento desenhado no lenço.



Fonte: Própria.

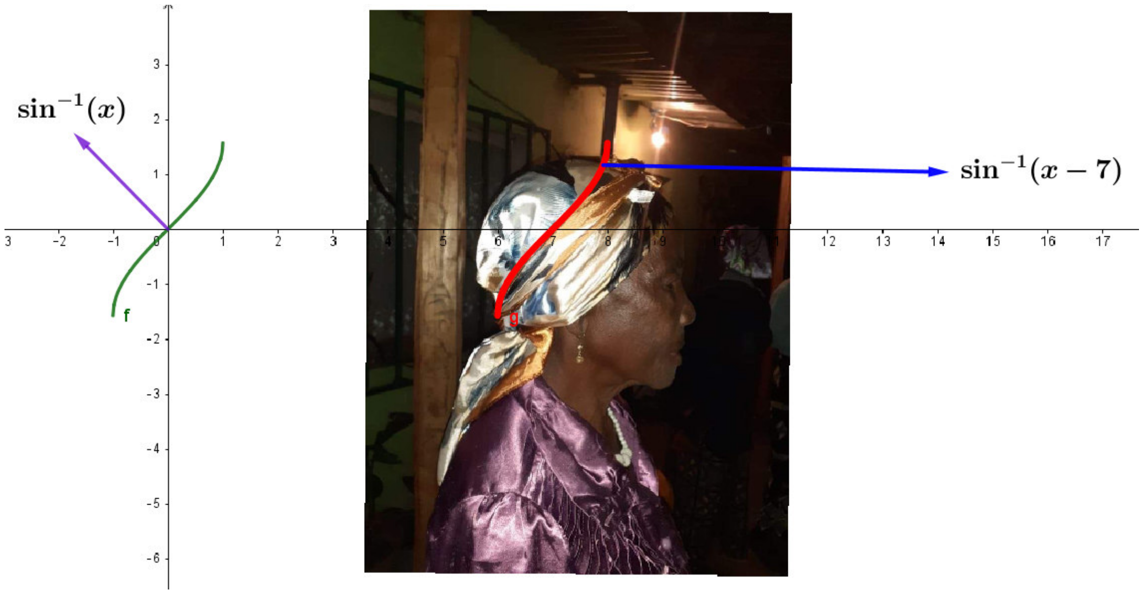
O segmento $\overline{CD}$ vai se enrolando fazendo curvas, contornando a forma da cabeça. Se o lenço se ajustar ao cabelo de forma circular (raio r), então o perfil do segmento em cada plano de visualização paralelo ao eixo de contorno, é dado por $p(t) = cr\, arc \sin\frac{x}{r}$.

Fig. 10 - Segmento desenhado no lenço e amarrado na cabeça.

Fonte: Própria.

A mesma análise pode ser feita, visualizando a forma que o lenço adopta quando é enrolado na cabeça da mulher angolana, conforme se constata na imagem que se segue.

Fig. 11 - A inversa da função seno no lenço enrolado.



Fonte: Foto matematizada pelo autor através do Geogebra.

Para alguns lenços com motivos ajustados a forma da cabela, contornando a testa, parecem apresentar uma forma elíptica. Para estes casos se o lenço for enrolado mais de três ou quatro vezes, com a descrição de um movimento periódico do motivo, de acordo com a ilustração da Figura 2, ao desenrolá-lo, definirá uma curva que pode ser o gráfico da seguinte função: $u(x) = hsin\frac{x}{r}$.

Nisto, podemos afirmar que para cada lenço enrolado na cabeça de uma mulher pode estar “congelada” uma inversa da função seno e ao desenrolar cada um destes lenços, pode estar “congelada” uma função seno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As ideias matemáticas apresentadas, são apenas algumas das várias que podem ser extraídas nesta arte. As experiências relacionadas com as equações e transformações geométricas bidimensionais fazem parte de um conteúdo científico que pode ser desenvolvido na sala de aulas e contextualizado na realidade do aluno, através da referida arte, o que sugere uma atividade motivacional e significativa no ensino-aprendizagem da função seno e da sua inversa. Para tal, este estudo foi conduzido a luz da abordagem relacionada com a Educação Matemática Realística, a qual dá ênfase ao papel protagónico do aluno como sujeito ativo da sua própria aprendizagem através da mediação do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. M., & Mnatsakaniam, M. A., (2012). *New Horizonte in Geometry.* Washington DC: The Mathematical Association of America.

Assembleia Nacional, (2016) *Lei de base de Educação*. Lei 17/16. Imprensa Nacional. Angola.

Ferreira, P., & Buriasco, R., (2016). Educação Matemática Realística: Uma abordagem para o processo de ensino e aprendizagem. *Edu. Matem. Pesq*, 18(1), 237-252.

Freudenthal, H., (1991). Why to teach Mathematcs so as be usefull. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1), 3-8.

Rosa, M., & Orey, D. C., (2010). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. *Educação e Pesquisa*, 38(4), 865-879. doi: 10.1590/S1517-97022012000400006

Van den Panhuizen, M. V. D. (1996). *Assement and Realistic Mathematcs Education.* Utrecht University